

Title	ランダム行列を用いた予算制約と投資リスク制約が課された最大/最小集中投資度の評価 (不確実性の下での意思決定理論とその応用 : 計画数学の展開)
Author(s)	多田, 大智; 新里, 隆; 肖, 霄; 山本, 久志
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2018), 2078: 46-52
Issue Date	2018-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/242114">http://hdl.handle.net/2433/242114</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## ランダム行列を用いた予算制約と投資リスク制約が課された 最大/最小集中投資度の評価

多田 大智\*, 新里 隆†, 肖 霄\*, 山本 久志\*  
\* 首都大学東京大学院 システムデザイン研究科  
† 玉川大学 工学部

Daichi Tada\*, Takashi Shinzato†, Xiao Xiao\*, Hisashi Yamamoto\*  
\*Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University  
†College of Engineering, Tamagawa University

### 1 はじめに

金融商品 (有価証券, 外貨取引, デリバティブなど) に投資をする場合, その損益は不確実であるため, 適切なリスク管理を行うことが重要となる. 従来, 経験則に基づく資産運用が行われ, 投資のリターンやリスクを定量的に評価した投資は行われていなかった. しかし, 1952 年に分散投資の原理を説いた論文 [1] が発表され, それを端緒に現代ポートフォリオ理論が確立された. そして, 理論に基づく客観的な投資が行われるようになった. ポートフォリオとは投資家が保有する金融商品の組み合わせを指し, 効用が最大となるようにポートフォリオを組む問題をポートフォリオ選択問題という. 今日では現代ポートフォリオ理論が浸透し, 各所でその考え方が活用されている. さらに, リーマン・ショックをはじめとする金融危機を経て, リスク管理の重要性が再認識されている.

ポートフォリオ選択問題を解析する研究は, オペレーションズ・リサーチ (Operations Research : OR) の分野で活発に行われてきた [2, 3]. しかし, 近年では情報統計力学をはじめとする他分野で多用されるレプリカ法を用いた研究が活発に行われている [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. 例えば, Ciliberti らは絶対偏差モデルと期待ショートフォールモデルにレプリカ法を適用し, 資産数に対してデータ期間数が短いときに生ずる相転移現象を分析した [4]. また, Shtinzao は最小投資リスクや集中投資度が自己平均性を満たすことを示し, レプリカ法を用いて導出した最小投資リスクと OR 的手法を用いた最小期待投資リスクの比較を行った [5]. そして, 従来の資産運用では投資リスクを最小にできないことを指摘した. さらに, Shtinzao は予算制約と集中投資度制約が課された投資リスク最適化問題とその双対問題をレプリカ法を用いて解析し, 両問題の主双対関係を議論した [10, 12]. また, Haszonits らは総収益率と総期待収益率の差の分散を目的関数として与え, 予算制約と期待収益率制約が課された最小化問題をレプリカ法を用いて解析した [6]. 一方, Kondor らも収益率がしたがう確率分布の分散が資産ごとに異なる場合を想定し, 予算制約と空売り規制が課された投資リスク最小化問題をレプリカ法を用いて解析した [9].

Ciliberti, Kondor, Shinzato らはポートフォリオ選択問題の解析にレプリカ法を適用しているが, レプリカ法はレプリカ数の解析接続による結果の妥当性に問題点を含むことが知られている [13, 14]. そのため, レプリカ法を用いた解析結果は数値的に検証されているが, 数学的に厳密とは言えない. 一方, リスク管理において, 誤った知見は大きな損失に繋がる可能性があるため, 解析結果は数学的に厳密であることが望ましい. 本研究はその点を考慮し, 数学的厳密性が保証されるランダム行列を用いてポートフォリオ選択問題の解析を行う. 特に, 本稿では先行研究 [12] で議論された予算制約と投資リスク制約が課された最大/最小集中投資度を再考する. さらに, ランダム行列を用いた理論値が現実の投資に適用可能か, 数値実験による検証も行う.

本稿の構成は以下の通りである. 2 章ではポートフォリオ最適化解析を述べる. その中で, 評価指標を定義し,

ポートフォリオ選択問題の設定を説明する。3 章ではランダム行列を用いて予算制約と投資リスク制約が課された最大/最小集中投資度を評価する。さらに、4 章ではランダム行列を用いて導出された理論値と実験値の比較を行い、現実の投資に適用可能か検証を行う。最後に、5 章でまとめと今後の課題を述べる。

## 2 ポートフォリオ最適化解析

### 2.1 リスクと集中投資度

はじめに、投資を評価するための指標を定義する。本研究では空売り規制のない取引市場で  $p$  期間投資する状況を考える。資産  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) の投資比率を  $w_i$  で表し、ポートフォリオを  $\vec{w} = (w_1, w_1, \dots, w_N)^T \in \mathbf{R}^N$  で表す。ただし、記号  $T$  はベクトルや行列の転置を表す。また、資産  $i$  の期間  $\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, p$ ) における収益率  $\bar{x}_{i\mu}$  は、独立同一に  $E[\bar{x}_{i\mu}] = r_i, V[\bar{x}_{i\mu}] = 1$  となる確率分布にしたがうとする。ここで、投資リスク  $\mathcal{G}(\vec{w} | X)$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\vec{w} | X) &= \frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^p \left( \sum_{i=1}^N \bar{x}_{i\mu} w_i - \sum_{i=1}^N r_i w_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu} \right) w_i w_j \\ &= \frac{1}{2} \vec{w}^T J \vec{w} \end{aligned} \quad (1)$$

で定義する。ただし、修正した収益率  $x_{i\mu} = \bar{x}_{i\mu} - r_i$  と要素  $i, j$  が

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p x_{i\mu} x_{j\mu} \quad (2)$$

となる Wishart 行列  $J = \{J_{ij}\} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  を用いた [15]。また、Wishart 行列  $J$  は収益率行列  $X = \left\{ \frac{x_{i\mu}}{\sqrt{N}} \right\} \in \mathbf{R}^{N \times p}$  を用いて  $J = XX^T$  と表すことができる。式 (1) の投資リスク  $\mathcal{G}(\vec{w} | X)$  は、期間  $\mu$  のリターン  $\sum_{i=1}^N \bar{x}_{i\mu} w_i$  と期待リターン  $\sum_{i=1}^N r_i w_i$  の偏差を  $p$  期間にわたって総和した値を投資のリスクと考える指標である。本研究は、投資資金が有限であることを

$$\sum_{i=1}^N w_i = N \quad (3)$$

で表し、式 (3) を予算制約と呼ぶ。通常、予算制約は比率の総和となるため、 $\sum_{i=1}^N w_i = 1$  で与えられる。しかし、本研究は、資産数  $N$  が大きい状況で投資比率  $w_i$  のオーダー  $O(\cdot)$  が  $w_i \sim O(1)$  となるように、式 (3) の予算制約を用いる。ただし、式 (3) の予算制約を用いても、現実の投資に影響を及ぼさないことに留意されたい [5]。つぎに、分散投資の程度を表す指標として集中投資度  $q_w$  を

$$q_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 \quad (4)$$

で定義する。集中投資度  $q_w$  は式 (3) の予算制約から

$$\begin{aligned} q_w - 1 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( w_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \right)^2 \\ &= V[w] \end{aligned} \quad (5)$$

となり、ポートフォリオ  $\vec{w}$  の分散を表すことが分かる。さらに、集中投資度  $q_w$  は式 (3) の予算制約から、以下の性質を持つ。

- 各資産に均等に投資をする場合 (均等投資型)  
どの資産にも均等に投資をする場合, 例えば,  $\vec{w} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^N$  では,  $q_w = 1$  となる.
- 特定の資産に集中して投資をする場合 (集中投資型)  
特定の資産に集中して投資をする場合, 例えば,  $\vec{w} = (N, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^N$  では,  $q_w = N$  となる.

以上より, 投資形態が均等投資型に近づけば, 集中投資度  $q_w$  は 1 に漸近し, 集中投資型に近づけば, 集中投資度  $q_w$  は 1 から遠ざかることが分かる. また, 式 (5) より,  $q_w \geq 1$  である.

## 2.2 予算制約と投資リスク制約が課された最大/最小集中投資度

本稿では以下の最大集中投資度  $q_{w,\max}$  と最小集中投資度  $q_{w,\min}$  :

$$q_{w,\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{\vec{w} \in \mathcal{W}_D} \frac{2}{N} \mathcal{H}(\vec{w}) \quad (6)$$

$$q_{w,\min} = \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{\vec{w} \in \mathcal{W}_D} \frac{2}{N} \mathcal{H}(\vec{w}) \quad (7)$$

を評価する. ただし,  $\mathcal{H}(\vec{w}) = \frac{1}{2} \vec{w}^T \vec{w}$  を用いた. また, ポートフォリオ  $\vec{w}$  の実行可能部分空間  $\mathcal{W}_D$  は

$$\mathcal{W}_D = \left\{ \vec{w} \in \mathbf{R}^N \mid \vec{e}^T \vec{w} = N, \frac{1}{2} \vec{w}^T J \vec{w} = N \kappa \varepsilon_0 \right\} \quad (8)$$

で与えられる. ただし,  $\vec{e}$  は単位ベクトルを表し,  $\varepsilon_0 = \frac{\alpha-1}{2}$  は予算制約が課された最小投資リスクを表す [5].  $\alpha$  は資産数  $N$  と期間数  $p$  の比を表す. つまり,  $\alpha = \frac{p}{N}$  である. また,  $\varepsilon_0 > 0$  であることから,  $\alpha > 1$  である. 先行研究 [12] ではレプリカ法を用いて式 (6) の最大集中投資度  $q_{w,\max}$  と式 (7) の最小集中投資度  $q_{w,\min}$  を

$$q_{w,\max} = \frac{(\sqrt{\alpha\kappa} + \sqrt{\kappa-1})^2}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \quad (9)$$

$$q_{w,\min} = \frac{(\sqrt{\alpha\kappa} - \sqrt{\kappa-1})^2}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \quad (10)$$

と評価している. また, 式 (6) の最大集中投資度  $q_{w,\max}$  と式 (7) の最小集中投資度  $q_{w,\min}$  を評価する問題を双対問題と位置づけ, 主問題に相当する以下の最小投資リスク  $\varepsilon_{\min}$  と最大投資リスク  $\varepsilon_{\max}$  を

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{\vec{w} \in \mathcal{W}_P} \frac{1}{N} \mathcal{G}(\vec{w} \mid X) \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha\tau + \tau - 1 - 2\sqrt{\alpha\tau(\tau-1)}}{2}, & 1 - \frac{1}{\tau} \leq \alpha \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{\vec{w} \in \mathcal{W}_P} \frac{1}{N} \mathcal{G}(\vec{w} \mid X) \\ &= \frac{\alpha\tau + \tau - 1 + 2\sqrt{\alpha\tau(\tau-1)}}{2}, \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

と評価している [10]. ただし, ポートフォリオ  $\vec{w}$  の実行可能部分空間  $\mathcal{W}_P$  は

$$\mathcal{W}_P = \{ \vec{w} \in \mathbf{R}^N \mid \vec{e}^T \vec{w} = N, \vec{w}^T \vec{w} = N\tau \} \quad (13)$$

で与えられる.  $\tau$  は集中投資度を規定する係数である. そして, 主問題と双対問題の解析結果を元に, 両問題に成り立つ主双対関係を議論している [12]. しかし, 解析手法としてのレプリカ法はいくつかの問題点を含み, 結果の妥当性が数値的に検証されているが数学的に厳密ではない [13, 14]. そこで, 本研究では数学的厳密性が保証されるランダム行列を用いて式 (6) の最大集中投資度  $q_{w,\max}$  と式 (7) の最小集中投資度  $q_{w,\min}$  を評価する. ただし, 式 (11) の最小投資リスク  $\varepsilon_{\min}$  と式 (12) の最大投資リスク  $\varepsilon_{\max}$  は, 先行研究 [16] でランダム行列を用いて厳密に評価されている.

### 3 ランダム行列を用いた最大/最小集中投資度の評価

本解析では、制約条件が課された最大/最小集中投資度を評価するために、Lagrange 未定乗数法を用いる。その際、Lagrange 関数に含まれるモーメント (ランダムネス) をランダム行列が有する普遍性を利用して評価する。そして、最大/最小集中投資度を解析的に導出する。

#### 3.1 予算制約と投資リスク制約が課された最大集中投資度

はじめに、最大集中投資度  $q_{w,\max}$  を評価する。Lagrange 関数  $\mathcal{L}_N(\vec{w}, h, \varphi)$  を以下で与える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(\vec{w}, h, \varphi) &= \mathcal{H}(\vec{w}) + h(\vec{e}^T \vec{w} - N) + \frac{1}{\varphi} \left( N\kappa\varepsilon_0 - \frac{1}{2} \vec{w}^T J \vec{w} \right) \\ \text{s.t. } h &\in \mathbf{R} \\ \varphi^{-1} \lambda_i &\geq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、制約条件  $\varphi^{-1} \lambda_i \geq 1$  は Lagrange 関数  $\mathcal{L}_N(\vec{w}, h, \varphi)$  が上に凸であることを保証する条件である。最適性の条件:  $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\vec{w}, h, \varphi)}{\partial \vec{w}} = 0$  から

$$\vec{w}^* = h(J - \varphi I_N)^{-1} \vec{e} \quad (15)$$

を得る。これより、Lagrange 双対関数  $\mathcal{L}_N(\vec{w}^*, h, \varphi) = \max_{\vec{w} \in \mathbf{R}^N} \mathcal{L}_N(\vec{w}, h, \varphi)$  は以下で与えられる。

$$\mathcal{L}_N(\vec{w}^*, h, \varphi) = \frac{Nh^2}{2\varphi} \left( \frac{\vec{e}^T (J - \varphi I_N)^{-1} \vec{e}}{N} \right) - \frac{Nh}{\varphi} + \frac{N\kappa\varepsilon_0}{\varphi} \quad (16)$$

ここで、式 (16) に含まれるモーメント  $\frac{\vec{e}^T (J - \varphi I_N)^{-1} \vec{e}}{N}$  は、資産数  $N$  が無限大の極限で Stieltjes 変換  $S(\varphi)$  :

$$S(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda - \varphi} d\lambda \quad (17)$$

に収束する [16, 17]。ただし、 $\rho(\lambda)$  は Wishart 行列  $J$  の漸近固有値分布を表す。さらに、問題設定から、漸近固有値分布  $\rho(\lambda)$  は Marčenko-Pastur 則 :

$$\rho(\lambda) = [1 - \alpha]^+ \delta(\lambda) + \frac{\sqrt{[\lambda_+ - \lambda][\lambda - \lambda_-]^+}}{2\pi\lambda} \quad (18)$$

で与えられる [18]。ただし、 $[x]^+ = \max(x, 0)$  と  $\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{\alpha})^2$  を用いた。したがって、式 (17) の Stieltjes 変換  $S(\varphi)$  は

$$S(\varphi) = \begin{cases} \frac{\alpha - 1 - \varphi - \sqrt{(1 + \alpha - \varphi)^2 - 4\alpha}}{2\varphi}, & \lambda_- > \varphi \\ \frac{\alpha - 1 - \varphi + \sqrt{(1 + \alpha - \varphi)^2 - 4\alpha}}{2\varphi}, & \lambda_+ < \varphi \end{cases} \quad (19)$$

と求まる [16]。これより、予算制約と投資リスク制約が課された最大集中投資度  $q_{w,\max}$  は

$$\begin{aligned} q_{w,\max} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{\vec{w} \in \mathcal{W}_D} \frac{2}{N} \mathcal{H}(\vec{w}) \\ &= \min_{h \in \mathbf{R}, 0 \leq \varphi \leq \lambda_{\min}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \mathcal{L}_N(\vec{w}^*, h, \varphi) \\ &= \min_{h \in \mathbf{R}, 0 \leq \varphi \leq \lambda_{\min}} \frac{h^2 S(\varphi)}{\varphi} - \frac{2h}{\varphi} + \frac{2\kappa\varepsilon_0}{\varphi} \\ &= \min_{h \in \mathbf{R}, 0 \leq \varphi \leq \lambda_{\min}} q_w(h, \varphi) \end{aligned} \quad (20)$$

となり、Lagrange 乗数  $h, \varphi$  に関する最小化問題に帰着する。ただし、2 行目で Marčenko-Pastur 則の性質:  $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  を用いて、式 (14) の制約条件  $\varphi^{-1} \lambda_i \geq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  を  $0 \leq \varphi \leq \lambda_{\min}$  と置き換

えた。また、最小固有値  $\lambda_{\min}$  は Marčenko-Pastur 則から、 $\lambda_{\min} = (1 - \sqrt{a})^2$  で与えられる [18]。さらに、最適性の条件： $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{w}^*, h, \varphi)}{\partial h} = \frac{\partial q_w(h, \varphi)}{\partial h} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{w}^*, h, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial q_w(h, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$  から

$$h^* = \frac{1}{S(\varphi)} \quad (21)$$

$$\varphi^* = \frac{\left(\kappa - \sqrt{a\kappa(\kappa-1)}\right) \left(\kappa - 1 - \sqrt{a\kappa(\kappa-1)}\right)}{\left(\kappa - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \left(\kappa + \frac{1}{\alpha-1}\right)} \quad (22)$$

を得る。これより、式 (20) の最大集中投資度  $q_{w,\max}$  は

$$\begin{aligned} q_{w,\max} &= q_w(h^*, \varphi^*) \\ &= \frac{(\sqrt{\alpha\kappa} + \sqrt{\kappa-1})^2}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \end{aligned} \quad (23)$$

と求まる。この結果はレプリカ法を用いた式 (9) の理論値と一致する。したがって、レプリカ法を用いた結果の妥当性が数学的に厳密に保証された。

### 3.2 予算制約と投資リスク制約が課された最小集中投資度

つぎに、最小集中投資度  $q_{w,\min}$  を評価する。Lagrange 関数  $\mathcal{L}_N(\bar{w}, h, \varphi)$  を以下で与える。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(\bar{w}, h, \varphi) &= \mathcal{H}(\bar{w}) + h(\bar{e}^T \bar{w} - N) + \frac{1}{\varphi} \left( N\kappa\epsilon_0 - \frac{1}{2} \bar{w}^T J \bar{w} \right) \\ \text{s.t. } h &\in \mathbf{R} \\ \varphi^{-1} \lambda_i &\leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、制約条件  $\varphi^{-1} \lambda_i \leq 1$  は Lagrange 関数  $\mathcal{L}_N(\bar{w}, h, \varphi)$  が下に凸であることを保証する条件である。3.1 節と同様の議論から、予算制約と投資リスク制約が課された最小集中投資度  $q_{w,\min}$  は

$$\begin{aligned} q_{w,\min} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{\bar{w} \in \mathcal{W}_D} \frac{2}{N} \mathcal{H}(\bar{w}) \\ &= \max_{h \in \mathbf{R}, \varphi \leq 0, \varphi \geq \lambda_{\max}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \mathcal{L}_N(\bar{w}^*, h, \varphi) \\ &= \max_{h \in \mathbf{R}, \varphi \leq 0, \varphi \geq \lambda_{\max}} q_w(h, \varphi) \end{aligned} \quad (25)$$

となり、Lagrange 乗数  $h, \varphi$  に関する最大化問題に帰着する。ただし、2 行目で Marčenko-Pastur 則の性質： $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  を用いて、式 (24) の制約条件  $\varphi^{-1} \lambda_i \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  を  $\varphi \leq 0, \varphi \geq \lambda_{\max}$  に置き換えた。また、最大固有値  $\lambda_{\max}$  は Marčenko-Pastur 則から、 $\lambda_{\max} = (1 + \sqrt{a})^2$  で与えられる [18]。さらに、最適性の条件： $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{w}^*, h, \varphi)}{\partial h} = \frac{\partial q_w(h, \varphi)}{\partial h} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}_N(\bar{w}^*, h, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial q_w(h, \varphi)}{\partial \varphi} = 0$  から、式 (21) の Lagrange 乗数  $h^*$  と

$$\varphi^* = \frac{\left(\kappa - \sqrt{a\kappa(\kappa-1)}\right) \left(\kappa - 1 + \sqrt{a\kappa(\kappa-1)}\right)}{\left(\kappa - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \left(\kappa + \frac{1}{\alpha-1}\right)} \quad (26)$$

を得る。これより、式 (25) の最小集中投資度  $q_{w,\min}$  は

$$\begin{aligned} q_{w,\min} &= q_w(h^*, \varphi^*) \\ &= \frac{(\sqrt{\alpha\kappa} - \sqrt{\kappa-1})^2}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1 \end{aligned} \quad (27)$$

と求まる。この結果はレプリカ法を用いた式 (10) の理論値と一致する。したがって、レプリカ法を用いた結果の妥当性が数学的に厳密に保証された。

## 4 数値実験

3章では、資産数  $N$  が無限大の極限であることを仮定し、Wishart 行列  $J$  の漸近固有値分布を用いた。しかし、現実の投資では資産数  $N$  は有限となる。したがって、理論値が (十分に大きい) 有限の資産数に対して適用可能か検証を行う必要がある。本章では数値実験を行い、有限の資産数に対する最適値 (実験値) と理論値の比較を行う。また、機関投資家の資産運用を想定して資産数  $N = 1000$  とする。

Lagrange 未定乗数法より、最大集中投資度  $q_{w,\max}(X_s)$  と最小集中投資度  $q_{w,\min}(X_s)$  は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} q_{w,\max}(X_s) &= \min_{h \in \mathbf{R}, 0 \leq \varphi \leq \lambda_{\min}} \frac{h^2}{\varphi} \left( \frac{\bar{e}^T (J_s - \varphi I_N)^{-1} \bar{e}}{N} \right) - \frac{2h}{\varphi} + \frac{2\kappa\epsilon_0}{\varphi} \\ &= \min_{0 \leq \varphi \leq \lambda_{\min}} -\frac{1}{\varphi} \left( \frac{N}{\bar{e}^T (J_s - \varphi I_N)^{-1} \bar{e}} - 2\kappa\epsilon_0 \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} q_{w,\min}(X_s) &= \max_{h \in \mathbf{R}, \varphi \leq 0, \varphi \geq \lambda_{\max}} \frac{h^2}{\varphi} \left( \frac{\bar{e}^T (J_s - \varphi I_N)^{-1} \bar{e}}{N} \right) - \frac{2h}{\varphi} + \frac{2\kappa\epsilon_0}{\varphi} \\ &= \max_{\varphi \leq 0, \varphi \geq \lambda_{\max}} -\frac{1}{\varphi} \left( \frac{N}{\bar{e}^T (J_s - \varphi I_N)^{-1} \bar{e}} - 2\kappa\epsilon_0 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

数値実験では、修正した収益率  $x_{i\mu}$  は独立同一に標準正規分布にしたがうとする。そして、 $q_{w,\max}(X_s)$  と  $q_{w,\min}(X_s)$  を計算し、100 個のサンプル平均と理論値を比較する。ただし、サンプル収益率行列  $X_s$  ( $s = 1, 2, \dots, 100$ ) のサイズは  $N = 1000$ ,  $p = 2000$  ( $\alpha = \frac{p}{N} = 2$ ) である。

図 1 と図 2 は最大/最小集中投資度の実験結果を表す。横軸はリスクを規定する係数  $\kappa$  であり、縦軸は集中投資度  $q_w$  である。実線 (赤) は漸近固有値分布を用いた理論値を表し、エラーバー付きマーカー (青) は数値実験で求めたサンプル平均を表す。図 1 と図 2 より、実験値と理論値が一致していることから、有限の資産数 (十分に大きい) に対して理論値が適用可能であることが分かる。

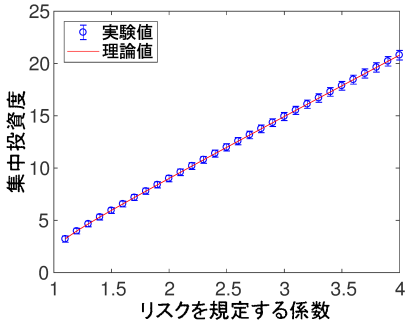


図 1 最大集中投資度

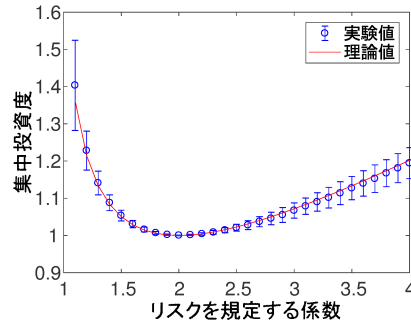


図 2 最小集中投資度

## 5 おわりに

本研究ではランダム行列を用いて予算制約と投資リスク制約が課された最大/最小集中投資度を評価した。本研究の位置づけは同問題に対するレプリカ法を用いた結果の妥当性を数学的に厳密に検証することであり、そのためにランダム行列を用いて再評価した。そして、ランダム行列を用いて導出された最大/最小集中投資度がレプリカ法の結果と一致することを確認した。さらに、数値実験では有限の資産数を想定し、資産数が無限大の極限であることを

仮定して求められた理論値と実験値の比較を行った。そして、資産数が 1000 程度であれば理論値が現実の投資に適用可能であることを確認した。

本研究では、収益率の分散が各資産で同一であることを仮定し、Stieltjes 変換を用いて最大/最小集中投資度を評価した。今後の課題は、収益率の分散が資産ごとに異なる場合の最大/最小集中投資度を評価することである。また、本研究では予算制約と投資リスク制約を拘束条件として用いたが、その他の線形制約が課されている場合でもランダム行列を用いて解析可能か議論する必要がある。さらに、本研究で用いたリスクとは異なる表現が成されたリスクの解析も行う必要がある。

## 参考文献

- [1] H. Markowitz, “Portfolio selection,” *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.
- [2] 今野浩, 理財工学 I, 日科技連, 1998.
- [3] 枇々木規雄, 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.
- [4] S. Ciliberti and M. Mézard, “Risk minimization through portfolio replication,” *The European Physical Journal B*, vol. 57, no. 2, pp. 175–180, 2007.
- [5] T. Shinzato, “Self-averaging property of minimal investment risk of mean-variance model,” *Public Library of Science ONE*, vol. 10, no. 7, e0133846, 2015.
- [6] I. V. Haszonits, F. Caccioli and I. Kondor, “Replica approach to mean-variance portfolio optimization,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2016, 123404, 2016.
- [7] T. Shinzato, “Portfolio optimization problem with nonidentical variances of asset returns using statistical mechanical informatics,” *Physical Review E*, vol. 94, no. 6, 062102, 2016.
- [8] T. Shinzato, “Replica analysis for the duality of the portfolio optimization problem,” *Physical Review E*, vol. 94, no. 5, 052307, 2016.
- [9] I. Kondor, G. Papp and F. Caccioli, “Analytic solution to variance optimization with no short positions,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2017, 2017.
- [10] T. Shinzato, “Minimal investment risk of a portfolio optimization problem with budget and investment concentration constraints,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2017, no. 2, 23301, 2017.
- [11] T. Shinzato, “Replica analysis for portfolio optimization with single-factor model,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 86, no. 6, 063802, 2017.
- [12] T. Shinzato, “Maximizing and minimizing investment concentration with constraints of budget and investment risk,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 490, pp. 986–993, 2018.
- [13] T. Tanaka, “Moment problem in replica method,” *Interdisciplinary Information Sciences*, vol. 13, no. 1, pp. 17–23, 2007.
- [14] T. Shinzato, “Validation of the replica trick for simple models,” *arXiv preprint*, arXiv:1606.07277, 2016.
- [15] J. Wishart, “The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population,” *Biometrika*, vol. 20A, no. 1–2, pp. 32–52, 1928.
- [16] 多田大智, 新里隆, 肖霄, 山本久志, “ランダム行列を用いた予算制約・集中投資度制約がある場合の最小投資リスクの理論評価,” 京都大学数理解析研究所研究集会「確率的環境下における数理モデルの理論と応用」, vol. 2017, no. 2044, pp. 35–45, 2017.
- [17] A. M. Tulino and S. Verdú, *Random matrix theory and wireless communications*, Now Publishers, Hanover, 2004.
- [18] V. A. Marčenko and L. A. Pastur, “Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices,” *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 1, no. 4, pp. 457–483, 1967.